

# Aktivnost 4

---

## Zaznavanje in popravljanje napak

Pri shranjevanju in pri prenašanju podatkov lahko pride do napak. Računalniki uporabljajo različne načine za preverjanje pravilnosti podatkov in njihovo popravljanje.

### Namen

Razumevanje ideje, da je mogoče k podatkom dodati kontrolo pravilnosti. Spoznavanje nekaj konkretnih postopkov za ta namen.

Aktivnost se navezuje na matematiko, predvsem seštevanje in množenje.

### Trajanje

Ena ura

### Potrebščine

Za ves razred

- 36 večjih kart (lahko so tudi listi papirja ali kartona, ki je na vsaki strani druge barve) za prikaz "čarovniškega trika"; za manjšo skupino zadoščajo igralne karte;
- katerokoli knjiga s 13-mestno kodo ISBN (takšne so vse novejšje knjige).

Za vsak par učencev

- 36 podobnih, a manjših kart (papirjev, kartončkov) za vsak par otrok; lahko vzameš kar liste papirja, ki so po eni strani drugačne barve kot po drugi in ga razrežeš v 6×6 kosov velikosti 3,5×5 centimetrov;
- namesto tega lahko uporabiš (tudi) karte, ki imajo na eni strani 0 in na drugi 1; karte so na ločeni poli, ki jo je potrebno natisniti dvostransko in razrezati.

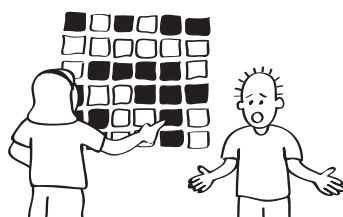
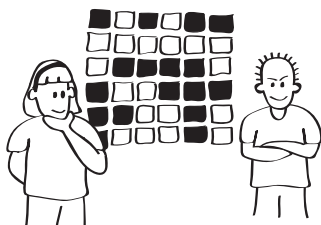
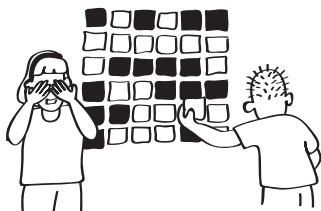
## Čarovniški trik

Za trik potrebuješ kup (recimo 36) enakih dvostranskih kart. Izdelaš jih lahko iz papirja, ki je pobarvan po eni strani. Za prikaz na tabli pa so najprimernejše magnetne karte. Karte lahko zložiš tudi na mizo ali na tla, če lahko postaviš otroke tako, da jih bodo videli.

1. Izberi otroka, ki zloži karte v kvadrat velikosti  $5 \times 5$ , pri čemer naključno izbere, katero stran bodo kazale karte.
2. Dodaj še en stolpec in vrstico, češ, da bo še bolj zapleteno. V resnici jih izberi tako, da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu sodo število obarvanih kart.
3. Zakrij si oči in prosi otroka, da obrne eno karto, pa boš uganil, katera je bila.
4. Obrnjena karta je v vrstici in stolpcu z lihim številom obarvanih kart.

Če se zdi otrokom naloga prelahka, naj si več otrok pripravi karte vsak na svoji mizi. Vsem dodaš po eno vrstico in stolpec. Nato obrnejo vsak eno karto ... ti pa lahko še vedno uganeš, katero.

Morda imaš tako izvrsten spomin ... morda pa gre za trik. Ga lahko otroci uganejo?



## Nauči trika še otroke

1. Razporedi otroke v pare. Par razpostavi karte v pet vrst in stolpcev.
2. Koliko obarvanih kart je v vsaki vrstici in stolpcu? Je število liho ali sodo? (Ne pozabi, da je 0 sodo število.)
3. Otroci dodajo šesto karto v vsako vrstico, tako da bo število obarvanih kart povsod sodo. Dodatni karti pravimo "parnostna karta".
4. Nato dodajo šesto karto v vsak stolpec (tudi novi, parnostni), da bo tudi število obarvanih kart po stolpcih sodo.
5. Potem obrnejo eno od kart. S tem so "pokvarili" parnost določenega stolpca in vrstice, s čimer lahko določijo, za katero karto gre.
6. Otroci se nato izmenjujejo pri izvajanju trika.

## Dodatne možnosti

Poskusi še z drugimi objekti. Primerno je vse, kar ima dve stanji – igralne karte, kovanci (grb in cifra). Potreboval boš vsaj 25 objektov, boljše pa je, če jih imaš 36.

Lahko si natisneš tudi karte z ničlami in enicami, da nalogo povežeš z dvojiškim številskim sistemom. Na ta način bodo otroci razumeli povezavo z računalnikom – s kartami tako zapisujemo ali sporočamo pet števil med 0 in 31.

## Pogovor

Kaj se zgodi, če obrnemo več kart? (Če obrnemo dve, vemo, da je nekaj spremenjeno, vendar ne vemo, kateri par kart. Navadno lahko izbiro zožimo na dva možna različna para. Če obrnemo štiri karte, se lahko zgodi, da so vsi parnostni biti pravilni in ne zaznamo spremembe.)

Razmisli o spodnji desni karti: je to parnostna karta za zadnji stolpec ali zadnjo vrstico? (Za oboje. Nemogoče je, da bi imeli liho število sodih stolpcev, a sodo število sodih vrstic.)

Lahko trik izvajamo le s kartami v kvadratu? Mora biti stranica kvadrata ravno, preden ga dopolnimo s parnostno karto, ravno pet? Mora biti liha? (Ne, trik deluje pri poljubnem pravokotniku.)

Bi lahko kontrolo parnosti spremenili v kontrolo lihosti – namesto, da bi imeli v vsaki vrstici sodo, bi postavili v vsako vrstico liho število obarvanih kart? (Da, vendar bi imeli težave s spodnjo desno karto. Ta se bo izšla le, če je obeh, stolpcev in vrstic sodo ali liho. Pravokotnik sme biti dimenzij  $5 \times 7$  ali  $10 \times 6$ , ne pa  $6 \times 7$ .

Kje to pride prav računalniku? Se ti je že zgodilo, da CD ali DVD ni delal ali pa je računalnik ali predvajalnik MP3 javil, da je z datoteko nekaj narobe? Naučili smo se že, da računalnik vse shranjuje kot dvojiška števila. Računalnik lahko vzame osem bajtov in jih zloži v kvadrat s stranico 8 in mu doda parnostne bite. Če je CD opraskan ali pa je z datoteko kaj narobe, to opazi – tako kot smo opazili obrnjene karte – in napako popravi ali pa vsaj opazi.

## Sem prav seštel?

1. Učenci naj predlagajo dve veliki (recimo šestmestni števili). Napiši ju na tablo, eno pod drugo.
2. Prostovoljec naj ju sešteje, kot običajno seštevamo. Primer:

$$\begin{array}{r} 137615 \\ + 528398 \\ \hline 666013 \end{array}$$

3. Zdaj jih nauči hitrega načina preverjanja pravilnosti rezultata. Najprej seštejejo vse številke prvega števila,  $1 + 3 + 7 + 6 + 1 + 5 = 23$ . Nato seštejejo vse številke vsote,  $2 + 3 = 5$ . To ponavljamo, dokler ne dobimo enomestnega števila (tule smo ga že.) Isto ponovimo z drugim številom:  $5 + 2 + 8 + 3 + 9 + 8 = 35$  in  $3 + 5 = 8$ . Zdaj ju seštejemo:  $5 + 8 = 13$  in  $1 + 3 = 4$ .

Nato preverimo vsoto:  $6 + 6 + 6 + 0 + 1 + 3 = 22$  in  $2 + 2 = 4$ . Obakrat smo dobili 4, torej je račun pravilen.

4. Opozori, da se lahko zgodi, da se vsota števk včasih izide tudi, če je rezultat napačen. Nikoli pa se ne zgodi, da bi bil rezultat pravilen, poskus z vsoto števk pa se ne bi izšel.
5. Postopek deluje tudi za seštevane več števil. Otrokom daj njihovi starosti primerno težak račun (npr. vsota treh štirimestnih števil). Vsak naj jih sam sešteje ter preveri rezultat.

Druga možnost je, da jih naučiš "enomestnega seštevavanja". Seštevali bomo samo enomestna števila. Če je vsota enomestna, je vse kot običajno ( $5 + 2 = 7$ ). Če slučajno dobimo dvomestno vsoto, pa seštejemo njene številke. Tako rečemo, recimo  $7 + 6 = 4$ , saj je  $7 + 6 = 13$ , to pa zamenjamo s 4, saj je  $1 + 3$  enako 4.

Z učenci povadi takšno seštevavanje, tako da jim (frontalno) zastavljaš račune, na primer,  $4 + 7 = 2$ ,  $2 + 3 = 5$ ,  $6 + 6 = 3$ ,  $7 + 9 = 7$ . Otroke bo takšno smešno seštevavanje zabavalo: opazili bodo, da je vsota lahko manjša od seštevancev in da se 9 obnaša podobno kot nič – poskusite  $1 + 9 = 1$ ,  $2 + 9 = 2$ ,  $3 + 9 = 3$  ...

S tem znanjem lahko tudi gornje številke seštevamo enomestno:  $1 + 3 = 4$ .  $4 + 7 = 2$ .  $2 + 6 = 8$ .  $8 + 1$  je 9.  $9 + 5 = 5$ . K temu lahko, kar naprej, prištevamo številke drugega števila:  $5 + 5 = 1$ ,  $1 + 2 = 3$ ,  $3 + 8 = 2$ ,  $2 + 3 = 5$ ,  $5 + 9 = 5$ ,  $5 + 8 = 4$ . Vsota vseh števk seštevancev je 4.

Vsota števk vsote je  $6 + 6 = 3$ .  $3 + 6 = 9$ .  $9 + 0 = 9$ ,  $9 + 1 = 1$ ,  $1 + 3 = 4$ .

## Kontrolne številke na knjigah, osebnih izkaznicah...

Preverjanje parnosti ni edini način preverjanja pravilnosti podatkov. Podoben sistem preverjanja se uporablja tudi za številke, ki jih vidimo vsakodnevno.

Spodnji vaji lahko, glede na starost učencev in razpoložljivi čas, izvajate tako, da frontalno pokažete primer in nato vsak učenec računa zase, lahko ostaneš pri frontalni predstavitvi, lahko pa ju tudi zgolj omeniš ali celo izpustiš.

### ISBN

Knjige imajo na platnici ali na prvi ali zadnji strani ponavadi številko ISBN. Vsaka knjiga ima drugačno, niti dve različni knjigi na svetu nimata enake kode. Če kdo naroči knjigo po internetu ali v knjigarni, zadošča, da pove njeno ISBN.

Koda ISBN ima lahko 10 ali 13 števk. Vse novejša knjige jih imajo trinajst. Prve tri številke so vedno 978. Naslednjih nekaj števk pove jezikovno skupino; pri slovenskih knjigah so številke od četrte do šeste enake 961. Naslednjih nekaj števk pove, pri kateri založbi je izšla knjiga in za katero knjigo gre – založniki poskrbijo, da je številka vsakega knjige drugačna. Čisto zadnja številka pa je kontrolna: tako kot smo pri triku s kartami v zadnji stolpec vedno postavili takšno karto, da je bilo števil obarvanih kart sodo, si pri kodah ISBN izmislijo zadnjo številko tako, da se izide naslednji račun: prvo številko pomnožimo z 1, drugo s 3, tretjo z 1, četrto s 3, peto z 1 ... in tako naprej. Vse skupaj seštejemo in vsota je deljiva z 10.

Za primer pogledjmo knjigo s kodo 9789610119463.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 9 & 7 & 8 & 9 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 9 & 4 & 6 & 3 \\ \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 \\ \hline 9 & + 21 & + 8 & + 27 & + 6 & + 3 & + 0 & + 3 & + 1 & + 27 & + 4 & + 18 & + 3 & = 130 \end{array}$$

Ker nas zanima le, ali je število deljivo z 10, si lahko delo olajšamo tako, da razmišljamo le o enicah:  $9 + 1 = 0$  (desetico izpustimo),  $0 + 8 = 8$ ,  $8 + 7 = 5$ ,  $5 + 6 = 1$  ... in tako naprej. Rezultat mora biti 0.

Desetice lahko izpustimo celo že pri množenju in računamo kar (preden pokažete, presodi, ali bo otroke to zanimalo ali zbegalo):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 9 & 7 & 8 & 9 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 9 & 4 & 6 & 3 \\ \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 & \times 3 & \times 1 \\ \hline 9 & + 1 & + 8 & + 7 & + 6 & + 3 & + 0 & + 3 & + 1 & + 7 & + 4 & + 8 & + 3 & = 0 \end{array}$$

Učenci naj vzamejo kak učbenik ali kakšno drugo knjigo, poiščejo ISBN in preverijo, ali je kontrolna številka pravilna.

Ko torej naročimo knjigo s pomočjo njene kode ISBN, lahko v knjigarni preverijo, ali je koda pravilna ali pa smo se kje zmotili.

## Pogovor

Na izdelkih v trgovini je navadno natisnjena črtna koda.



Črtna koda na določen način zapisuje neko številko. (Saj veš: sliko lahko opišemo s števkami in obratno. Črtna koda sicer ne deluje čisto tako kot zapisovanje slik, ki smo se ga učili pri eni prejšnjih aktivnosti, je pa podobna.) Številka, ki je shranjena s črtno kodo, je zapisana pod črtami. Ko blagajničarka s čitalcem črtno kode odčituje številke, se včasih zgodi, da koda ne deluje in jo je potrebno prebrati ponovno ali pa odtipkati ročno.

Kako čitalec ve, da ni uspel prebrati pravilne številke? Tudi tu je zadnja številka kontrolna, tako kot pri ISBN.

## EMŠO

Na osebni izkaznicah in v potnih listih imamo številko EMŠO (EMŠO je kratica za Enotna matična številka občana.) Prvih sedem števk pove rojstni datum, sledi 50, potem pa trimestna številka med 000 in 499 za moške in med 500 in 999 za ženske. Zadnja, trinajsta številka je kontrolna, izračunana po posebni formuli za EMŠO.

Z učenci lahko preveriš pravilnost kake številke EMŠO, če so dovolj stari in poznajo svoje številke, pa jih lahko preverijo. Kontrolna številka EMŠO se računa po nekoliko drugačni formuli: prvo številko množimo z 7, drugo s 6, tretjo s 5, ..., šesto z 2, sedmo pa spet s 7, osmo s 6 in tako naprej. Na koncu prištejemo še zadnjo številko in rezultat mora biti deljiv z 11.

Nekdo, ki je rojen 13. avgusta 2006 bi lahko imel EMŠO 1308006500275. Da je pravilna, preverimo tako.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 7 \quad 5 \\ \times 7 \quad \times 6 \quad \times 5 \quad \times 4 \quad \times 3 \quad \times 2 \quad \times 7 \quad \times 6 \quad \times 5 \quad \times 4 \quad \times 3 \quad \times 2 \\ \hline 7 + 18 \quad + 0 + 32 \quad + 0 \quad + 0 + 42 \quad + 30 \quad + 0 \quad + 0 \quad + 6 + 14 \quad + 5 = 154 \end{array}$$

154 je deljivo z 11, torej je številka pravilna.

Starši imajo poleg EMŠO še drugo, manj priljubljeno številko, ki ji pravimo davčna številka. Davčna številka je sestavljena iz osmih števk; osma je kontrolna in se računa skoraj natančno tako kot ISBN, le da prve številke ne množimo z 10 temveč z 8.

## Za učitelje: za kaj gre?

Pri vsakem shranjevanju in prenašanju podatkov je potrebno dodati kontrolo točnosti. Do napak pri prenosu lahko pride zaradi šuma na povezavi, pri shranjevanju na DVDje in CDje pride do težav, če je medij opraskan ali umazan, diski imajo lahko težave, če so izpostavljeni močnemu magnetnemu polju, računalniški pomnilniki (in USB ključki) pa se preprosto pokvarijo.

S sistemi, kakršne otroci spoznajo pri tej aktivnosti lahko zaznavamo napake (*error detection*) ali pa jih celo popravljamo (*error correction*) – obrnemo spremenjeno karto nazaj na njeno "pravo" vrednost. Kot smo se naučili, se lahko, kadar je napak več, zgodi, da jih ne moremo popraviti ali pa jih niti ne zaznamo.

Vsi sistemi za zaznavanje in popravljanje napak zahtevajo dodatne bite ali dodatne številke. Obstajajo sistemi, ki omogočajo, da popravimo tudi večje število napačnih bitov. Trdi diski v računalnikih navadno žrtvujejo precej prostora za popravljanje napak. Danes je cena diskov dovolj nizka, da tudi za domačo rabo včasih že uporabljamo diske, ki kar podvojijo vsak zapisan podatek in tako povečajo zanesljivost shranjevanja. Tako imamo lahko, na primer, dva diska s kapaciteto 1 terabajt, na katerih pa so shranjene iste datoteke. Če se datoteka pokvari na enem, nam je še vedno na voljo na drugem.

Obstajajo pa tudi sistemi, ki ne omogočajo popravljanja, temveč le zaznavanje, kot na primer kontrolne številke ISBN in EMŠO. Pri prenašanju podatkov po internetu se uporabljajo sistemi, ki so – od daleč – podobni kontroli parnosti, vendar so zamišljeni tako, da zanesljiveje zaznajo prav napake, do kakršnih pride pri internetnih povezavah.

Končno omenimo še posebne kontrolne vsote, ki so jih sestavili kriptografi ("skriptopisci") in so namenjene preprečevanju ponarejanja podatkov. Predstavljajte si, da prek spletne banke nakažemo določeno vsoto na določen bančni račun. Nepridiprav, ki prisluškuje naši povezavi, bi si seveda želel ponarediti takšno zahtevo in banko prepričati, da nakaže takšno (ali, še raje, večjo) vsoto še na njegov račun. Računalnik pri komunikaciji s spletno banko dodaja kontrolne vsote, ki so sestavljene tako, da jih lahko izračuna le naš računalnik, s pomočjo podatkov, ki se skrivajo v našem certifikatu. Nepridiprav takšne kontrolne vsote ne more ponarediti, razen če dobi v roke naš certifikat. Če ste se spraševali, čemu je certifikat tako pomembno varovati – zdaj veste.

### Namen aktivnosti

Otroci naj bi se po tej aktivnosti zavedali, da je računalnik "zmotljiv": podatki se lahko pokvarijo pri prenašanju, zaradi motenj na povezavah in tudi pri shranjevanju, zaradi napak na medijih. Razumeli bodo, recimo, kako računalnik ve, da je DVD opraskan.

Vaja, kjer preverjamo vsoto tako, da seštevamo številke, je poučna iz več perspektiv.

Iz perspektive kontrolnih vsot predstavlja preprosto vsoto, ki je ni težko računati na "toku podatkov": vsako novo številko mimogrede prištejemo k starim. Seštevanje je hitro, saj delamo le z enomestnimi števili. Zelo od daleč je podobna, recimo kontrolnim vsotam CRC, ki se pogosto uporabljajo v komunikacijah.

Iz matematične perspektive je zanimiva, ker gre v bistvu seštevanje po modulu 9. Otroci (brez kakšne teorije) vidijo drugačno definicijo seštevanja. (Iz matematičnega vidika gre za aditivno grupo z 9 elementi, pri čemer sta 0 in 9 en in isti element grupe.)

Seštevanje po modulu je lahko zanimivo kot uvod v morebitne kasnejše naprednejše teme s področja kriptografije.

Končno, trik jim lahko v resnici pride prav pri seštevanju.

### Kako deluje preverjanje vsote?

Iz šole se najbrž spomnimo preskusa, ali je neko število deljivo z 9: sešteti je potrebno njegove številke, in če je vsota deljiva z 9, je tudi število deljivo z 9. V resnici velja še več: ostanek pri deljenju vsote števk z 9 je kar enak ostanku pri deljenju "celega" števila z 9.

Ker je matematika lepa, se prepričajmo, da je res. Vzemimo recimo število 7615 in se malo poigramo z njim.

$$\begin{aligned}7615 &= 7 \times 1000 + 6 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \\ &= 7 \times (999 + 1) + 6 \times (99 + 1) + 1 \times (9 + 1) + 5 \\ &= 7 \times 999 + 6 \times 99 + 1 \times 9 + 7 + 6 + 1 + 5\end{aligned}$$

Prvi trije členi so deljivi z 9, torej ne prispevajo ničesar k ostanku pri deljenju 7615 z 9. Ostanek pri deljenju 7615 z 9 je enak ostanku pri deljenju  $7 + 6 + 1 + 5$  z 9. Enako seveda velja za poljubno število, ne le 7615.

Ostanek pri deljenju 7615 z 9 je torej enak kot ostanek pri deljenju  $7 + 6 + 1 + 5 = 19$  z 9. Ostanek pri deljenju 19 z 9 pa je enak ostanku pri deljenju  $1 + 9 = 10$  z 9. Ostanek pri deljenju 10 z 9 pa je enak ostanku pri deljenju  $1 + 0 = 1$  z 9. Torej 1. (Če vas je kdaj zanimalo, s čim zaboga se ukvarjajo numerologi in kakšna znanost je za tem: numerologi so profesionalni računarji ostanka pri deljenju z 9. Nič drugega.)

Da razumemo trik, se moramo spomniti le še, da se ostanki pri deljenju seštevajo. Če je ostanek pri deljenju  $a$  z 9 enak  $b$ , ostanek pri deljenju  $c$  z 9 pa  $d$ , je ostanek pri deljenju  $a+c$  z 9 enak ostanku pri deljenju  $b+d$  z 9.